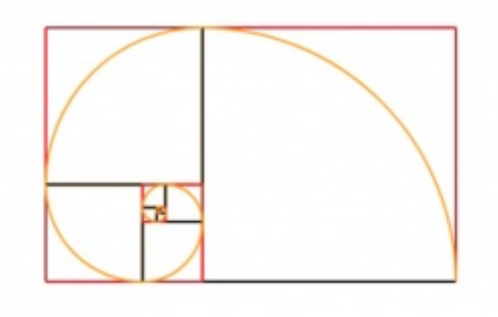
Der goldene Schnitt



Der goldene Schnitt beschreibt das Verhältnis zweier Teile zueinander. Dabei ist das Verhältnis des größeren zum kleineren Teil identisch zum Verhältnis der Summe beider Teile zum größeren Teil. Mathematisch also

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

wobei a der größere Teil ist.
Dieses Verhältnis lässt sich ausrechnen:

$$\begin{aligned}
& & \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a} & & |b = 1 - a \\
\Leftrightarrow & & \frac{a}{1-a} &= \frac{a+(1-a)}{a} & & \\
\Leftrightarrow & & \frac{a}{1-a} &= \frac{1}{a} & & |\cdot a \\
\Leftrightarrow & & \frac{a^2}{1-a} &= 1 & & |\cdot(1-a) \\
\Leftrightarrow & & a^2 &= 1 - a & & |-(1-a) \\
\Leftrightarrow & & a^2 + a - 1 &= 0 & &
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man auf die quadratische Gleichung anwenden. Die quadratische Gleichung sieht wie folgt aus:
$ax^2 + bx + c = 0$ wobei hier dann $a = 1, x = a, b = 1, c = -1$ gilt.

Die quadratische Gleichung kann man so umformen, dass man die 1. binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erhält. Diese Umformung führt dann zu folgender Formel:

$$\begin{aligned}
& & ax^2+bx+c &= 0 & &|-c \\
&\Leftrightarrow & ax^2+bx &= -c & &|4a \\
&\Leftrightarrow & 4a^2x^2+4abx &= -4ac & & \\
&\Leftrightarrow & (2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b &= -4ac & &|+b^2\,(\text{quadratische Ergänzung}) \\
&\Leftrightarrow & (2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2 &= b^2-4ac & &|(\text{binomische Umformung}) \\
&\Leftrightarrow & (2ax+b)^2 &= b^2-4ac & &|\pm\sqrt{} \\
&\Leftrightarrow & 2ax+b &= \pm\sqrt{b^2-4ac} & &|-b \\
&\Leftrightarrow & 2ax &= -b\pm\sqrt{b^2-4ac} & &|:2a \\
&\Leftrightarrow & x_{1,2} &= \tfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} & &
\end{aligned}$$

für die Gleichung des goldenen Schnitts gilt wie oben beschrieben $a=1, x=a, b=1, c=-1$

$$a_{1,2} = \tfrac{-1\pm\sqrt{1-(4\cdot -1)}}{2} = \tfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$a_1 = \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Also gilt für den goldenen Schnitt:

$$\begin{aligned}
a &= 0,6180339887499 \\
b &= 0,3819660112501
\end{aligned}$$